

Equivalence of categories of E-theory for C*-algebras over topological spaces by reflection functors

慶應義塾大学大学院 理工学研究科 基礎理工学専攻
橋本 七海 (Nanami HASHIMOTO) *

Abstract

本稿では, ある条件をみたす2つの有限 T_0 -空間 X, Y に対し, 対応する E-理論の圏 $\mathbf{E}(X), \mathbf{E}(Y)$ の間に鏡映関手を定義し, それが圏同値を与えることを説明する.

0 導入

作用素環の一種である **C*-環** はさまざまな数学的・物理的対象から自然に現れるものである. 異なる対象から異なる手段を用いて現れた2つの C*-環がどのような場合に同型になるのかを問う分類理論は, C*-環の研究において普遍的なテーマである. 講演者は, 単純とは限らない C*-環, すなわち非自明なイデアルをもつような C*-環の分類理論を専門に研究している.

Connes, Higson [CH90] によって導入された **E-理論** は C*-環の分類理論において強力な道具である. E-理論とは, 可分 C*-環 A, B に対し, アーベル群 $E(A, B)$ を関連付けて, その構造を調べるというものである. Dadarlat, Meyer [DM12] は, 通常の E-理論を一般化し, 有限 T_0 -空間 X 上の可分 C*-環 (イデアル束に X からの良い作用をもつ可分 C*-環) A, B に対して, アーベル群 $E(X; A, B)$ を定義することで, イデアルの情報も込めた E-理論を導入した. 有限 T_0 -空間 X 上の可分 C*-環を対象とし, A から B への射の集合を $E(X; A, B)$ とすることで, 圏 $\mathbf{E}(X)$ を定義することができる.

本研究では, ある条件をみたす2つの有限 T_0 -空間 X, Y に対し, 対応する E-理論の圏 $\mathbf{E}(X), \mathbf{E}(Y)$ の間に**鏡映関手**を定義し, それが圏同値を与えることを証明した (定理 2.4). ここで導入した鏡映関手は, 簾の表現論における Bernstein, Gelfand, Ponomarev [BGP73] の鏡映関手のアナロジーになっており, 非常に興味深い. さらに, この帰結として, 2つの有限 T_0 -空間 X_1, X_2 に対応するハッセ図が無向グラフとして同じ木¹を表すとき, 対応する E-理論の圏 $\mathbf{E}(X_1), \mathbf{E}(X_2)$ が同値であることを証明した (系 2.5). 本稿では, これらの結果を紹介する.

1 準備

1.1 有限集合に定まる位相

はじめに, 有限集合に定まる位相について簡単に説明しておこう. 有限集合 X に対し, 次のような全単射とその逆写像がある:

$$\{X \text{ 上の } T_0\text{-位相}\} \xrightleftharpoons[(ii)]{(i)} \{X \text{ 上の順序}^2\}.$$

ここで, (i), (ii) は次のような操作で定まる写像である.

*E-mail: nanami_hashimoto@keio.jp

¹木とは, 閉路をもたない連結な無向グラフのことである.

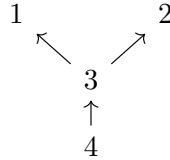
²順序とは, 反射律, 推移律, 反対称律をみたす二項関係のことである.

(i) $x, y \in X$ に対し, $\overline{\{x\}} \subset \overline{\{y\}}$ が成り立つとき, $x \leq y$ と定める.

(ii) $U \subset X$ に対し, $\forall x \in U, \forall y \in X, x \leq y \Rightarrow y \in U$ が成り立つとき, U を開集合とする.

分離公理 T_0 は反対称律に対応している. また, X 上の順序はハッセ図を用いて表せることを思い出してほしい.

例 1.1. 4 点集合 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ に対して, 次のハッセ図を考える.



このとき, X には $1 < 3, 2 < 3, 3 < 4, 1 < 4, 2 < 4$ という順序が定まっている. また, X の開集合は $\emptyset, 4, 34, 134, 234, 1234$ である. ここで, $34 := \{3, 4\}$ などの表記に注意してほしい.

1.2 有限 T_0 -空間上の C^* -環

まずは C^* -環の定義を手短に述べる. 詳細は [Bla06] などを参照してほしい.

定義 1.2. 複素数体 $\mathbb{C}$ 上の代数 A であって, 次の条件をみたす共役線形な写像 $A \ni a \mapsto a^* \in A$ と完備ノルムを備えたものを **C^* -環 (C^* -algebra)** という:

$$(ab)^* = b^*a^*, \quad a^{**} = a, \quad \|ab\| \leq \|a\|\|b\|, \quad \|a^*a\| = \|a\|^2 \quad (\forall a, b \in A).$$

本稿では, 後で E -理論を考えるために単に C^* -環というだけで常に可分性³を仮定することにする.

例 1.3. 複素数体 $\mathbb{C}$ は複素共役と絶対値によって C^* -環となる.

例 1.4. 閉区間 $[0, 1]$ 上の複素数値連続関数全体の代数 $C[0, 1]$ は, 各点での複素共役と $\sup$ ノルムによって C^* -環となる.

例 1.5. 可分ヒルベルト空間上のコンパクト作用素全体の代数 $\mathbb{K}$ は随伴と作用素ノルムによって C^* -環となる.

例 1.6. C^* -環 A, B のベクトル空間としての直和 $A \oplus B$ に, 成分ごとの積, $*$ -演算を入れ, $\|(a, b)\| := \max\{\|a\|, \|b\|\}$ でノルムを定めると, C^* -環になる.

定義 1.7. C^* -環 A の閉部分空間 I であって, 任意の $a \in A, b \in I$ に対して $ab, ba \in I$ をみたすものを**イデアル (ideal)** という.

注意 1.8. 実は, C^* -環のイデアルは C^* -環である. また, 商空間 A/I も $(a + I)^* := a^* + I$ という $*$ -演算と商ノルムで C^* -環となる.

例 1.9. $C_0(0, 1) = \{f \in C[0, 1] \mid f(0) = f(1) = 0\}$ は $C_0[0, 1] = \{f \in C[0, 1] \mid f(1) = 0\}$ のイデアルである.

定義 1.10. C^* -環 A, B に対し, 積と $*$ -演算を保つ線形写像 $\varphi: A \rightarrow B$ を **$*$ -準同型 ($*$ -homomorphism)** という⁴.

定義 1.11. 対象を C^* -環, 射を $*$ -準同型として得られる圏を C^* と表記する.

³ C^* -環が可分であるとは, 位相空間として可分, すなわち可算な稠密部分集合をもつことを意味する.

⁴実は, $*$ -準同型 $\varphi: A \rightarrow B$ は, 任意の $a \in A$ に対して, $\|\varphi(a)\| \leq \|a\|$ をみたす.

定義 1.12. C^* における図式

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{i} A \xrightarrow{q} Q \longrightarrow 0$$

が**完全列**であるとは, i が単射, q が全射で, $\text{Im } i = \text{Ker } q$ が成り立つ⁵ときをいう. 以降, i を包含写像とみなすことにする.

次に, 有限 T_0 -空間上の C^* -環⁶を導入する. X を有限 T_0 -空間とし, X の開集合全体の集合を $\mathcal{O}(X)$ と表記する. また, C^* -環 A のイデアル全体の集合を $\mathbb{I}(A)$ と表記する.

定義 1.13. X 上の C^* -環とは, 次の条件をみたす $\mathcal{O}(X) \ni U \mapsto A(U) \in \mathbb{I}(A)$ を備えた C^* -環 A を指す:

- (i) $A(\emptyset) = 0, A(X) = A$;
- (ii) 任意の $U, V \in \mathcal{O}(X)$ に対し, $A(U \cap V) = A(U) \cap A(V), A(U \cup V) = A(U) + A(V)$ ⁷.

例 1.14. X 上の C^* -環 A, B の C^* -環としての直和 $A \oplus B$ は, 各 $U \in \mathcal{O}(X)$ に対して $(A \oplus B)(U) := A(U) \oplus B(U)$ と定めることで, X 上の C^* -環になる.

定義 1.15. A, B を X 上の C^* -環とし, $\varphi: A \rightarrow B$ を $*$ -準同型とする. 任意の $U \in \mathcal{O}(X)$ に対し, $\varphi(A(U)) \subset B(U)$ となるとき, φ は X -同変 (X -equivariant) であるという.

定義 1.16. 対象を X 上の C^* -環, 射を X -同変な $*$ -準同型として得られる圏を $C^*(X)$ と表記する.

注意 1.17. X が 1 点空間のとき, $C^*(X) = C^*$ と思える.

定義 1.18. $C^*(X)$ における図式

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{i} A \xrightarrow{q} Q \longrightarrow 0$$

が X 上の C^* -環の**完全列**であるとは, 各 $U \in \mathcal{O}(X)$ に対し,

$$0 \longrightarrow I(U) \xrightarrow{i} A(U) \xrightarrow{q} Q(U) \longrightarrow 0$$

が C^* -環の完全列であるときをいう.

1.3 懸垂と写像錐

C^* -環 A, B に対し, $A \otimes B$ で maximal tensor product を表すことにする. C^* -環の tensor product については, ここでは深入りしないことにする. 詳細は [BO08] を参照せよ.

X を有限 T_0 -空間とする.

補題 1.19. C^* -環 D と X 上の C^* -環 A に対し, $D \otimes A$ は $\mathcal{O}(X) \ni U \mapsto D \otimes A(U) \in \mathbb{I}(D \otimes A)$ によって X 上の C^* -環となる. このようにして, 関手 $D \otimes -: C^*(X) \rightarrow C^*(X)$ が得られる.

定義 1.20. この補題から関手

$$C := C_0[0, 1) \otimes -: C^*(X) \rightarrow C^*(X), \quad S := C_0(0, 1) \otimes -: C^*(X) \rightarrow C^*(X)$$

が定まる. S を**懸垂関手 (suspension functor)** という.

⁵ $\text{Ker } q$ は A のイデアルであることに注意せよ.

⁶一般の位相空間上の C^* -環も定義できる. 詳細は [MN09] を参照せよ.

⁷ C^* -環 A のイデアル I, J に対し, $I \cap J$ と $I + J := \{a + b \mid a \in I, b \in J\}$ は A のイデアルになる.

注意 1.21. X 上の C^* -環 A に対し, 次が成り立つ:

$$\begin{aligned} C[0, 1] \otimes A &= C([0, 1], A) = \{f : [0, 1] \rightarrow A \mid f \text{ は連続} \}, \\ CA &= C_0[0, 1] \otimes A = C_0([0, 1], A) = \{f \in C([0, 1], A) \mid f(1) = 0\}, \\ SA &= C_0(0, 1) \otimes A = C_0((0, 1), A) = \{f \in C([0, 1], A) \mid f(0) = f(1) = 0\}. \end{aligned}$$

また, 次の X 上の C^* -環の完全列が得られる:

$$0 \longrightarrow SA \longrightarrow CA \xrightarrow{f \mapsto f(0)} A \longrightarrow 0.$$

定義 1.22. 2つの X -同変な $*$ -準同型 $\varphi_0, \varphi_1 : A \rightarrow B$ が**ホモトピック (homotopic)** であるとは, ある X -同変な $*$ -準同型 $\varphi : A \rightarrow C([0, 1], B)$ が存在して, 各 $a \in A$ に対し, $\varphi(a)(0) = \varphi_0(a)$ と $\varphi(a)(1) = \varphi_1(a)$ が成り立つことをいう.

定義 1.23. X 上の C^* -環 A が**可縮 (contractible)** であるとは, 恒等写像 $\text{id} : A \rightarrow A$ が $0 : A \rightarrow A$ とホモトピックであることをいう.

例 1.24. X 上の C^* -環 A に対し, CA は可縮である.

本稿で中心的な役割を果たすのが, 次に導入する写像錐である.

定義 1.25. X -同変な $*$ -準同型 $\varphi : A \rightarrow B$ に対し,

$$C_\varphi := \{(a, f) \in A \oplus CB \mid f(0) = \varphi(a)\}$$

と定める. 各 $U \in \mathcal{O}(X)$ に対し, $C_\varphi(U) := \{(a, f) \in A(U) \oplus CB(U) \mid f(0) = \varphi(a)\}$ と定めると, C_φ は X 上の C^* -環となる. C_φ を φ の**写像錐 (mapping cone)** という.

X -同変な $*$ -準同型 $\varphi : A \rightarrow B$ に対し, 次の可換図式が得られる:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & SB & \longrightarrow & C_\varphi & \longrightarrow & A \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \varphi \\ 0 & \longrightarrow & SB & \longrightarrow & CB & \xrightarrow{f \mapsto f(0)} & B \longrightarrow 0. \end{array}$$

ここで, 図式内の 2 つの行は X 上の C^* -環の完全列である. さらに, 写像錐は次の普遍性をもつ.

命題 1.26. $C^*(X)$ において, 次の可換図式が与えられているとする.

$$\begin{array}{ccc} A_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & B_1 \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ A_2 & \xrightarrow{\varphi_2} & B_2. \end{array}$$

このとき, X -同変な $*$ -準同型 $C_{\varphi_1} \rightarrow C_{\varphi_2}$ が一意に存在して, 次の図式を可換にする:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & SB_1 & \longrightarrow & C_{\varphi_1} & \longrightarrow & A_1 & \longrightarrow & 0 \\ & & \swarrow S\beta & \parallel & \swarrow \alpha & \downarrow \varphi_1 & \downarrow \varphi_1 & & \\ 0 & \longrightarrow & SB_2 & \longrightarrow & C_{\varphi_2} & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & \parallel & \downarrow & & \downarrow \varphi_2 & & \\ 0 & \longrightarrow & SB_1 & \longrightarrow & CB_1 & \longrightarrow & B_1 & \longrightarrow & 0 \\ & & \swarrow S\beta & \swarrow C\beta & \downarrow \beta & & \downarrow \beta & & \\ 0 & \longrightarrow & SB_2 & \longrightarrow & CB_2 & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

ここで, 4 つの行はすべて X 上の C^* -環の完全列である.

1.4 Bott 関手

E-理論を説明するための準備として Bott 関手を導入する. X を有限 T_0 -空間, $\mathbf{A}$ を加法圏⁸とする.

定義 1.27. 次の 3 つの条件をみたす関手 $F : C^*(X) \rightarrow \mathbf{A}$ を **Bott 関手**という:

(ホモトピー不変) $\varphi_0, \varphi_1 : A \rightarrow B$ がホモトピックであるならば, $F\varphi_0 = F\varphi_1$ が成り立つ;

(安定) A を X 上の C^* -環, $e \in \mathbb{K}$ をランク 1 の射影とし, X -同変な $*$ -準同型 $\iota : A \hookrightarrow \mathbb{K} \otimes A$ を $\iota(a) := e \otimes a$ として定めると, $F\iota : FA \rightarrow F(\mathbb{K} \otimes A)$ は同型である;

(半完全) X 上の C^* -環の完全列 $0 \rightarrow I \rightarrow A \rightarrow Q \rightarrow 0$ に対し, 誘導される 2 つのアーベル群の列

$$\mathbf{A}(FD, FI) \rightarrow \mathbf{A}(FD, FA) \rightarrow \mathbf{A}(FD, FQ), \quad \mathbf{A}(FQ, FD) \rightarrow \mathbf{A}(FA, FD) \rightarrow \mathbf{A}(FI, FD)$$

が完全列になる.

命題 1.28 (Bott 周期性). Bott 関手 $F : C^*(X) \rightarrow \mathbf{A}$ は, 懸垂関手 $S : C^*(X) \rightarrow C^*(X)$ を 2 回合成して得られる関手 $FS^2 : C^*(X) \rightarrow \mathbf{A}$ と自然同型である.

命題 1.29. $F : C^*(X) \rightarrow \mathbf{A}$ を Bott 関手とする. X 上の C^* -環の完全列

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{i} A \xrightarrow{q} Q \longrightarrow 0$$

が与えられているとする. このとき, 次が成り立つ.

- (1) I が可縮であるならば, $Fq : FA \rightarrow FQ$ は同型である.
- (2) Q が可縮であるならば, $Fi : FI \rightarrow FA$ は同型である.

1.5 E-理論

まずは, 通常の C^* -環に対する E-理論を手短に定義する. 詳細は [Bla98]などを参照してほしい.

定義 1.30. C^* -環 A, B に対し, $SA \otimes \mathbb{K}$ から $SB \otimes \mathbb{K}$ への asymptotic morphism のホモトピー同値類のなすアーベル群を $E(A, B)$ と表記する. C^* -環を対象とし, A から B への射の集合を $E(A, B)$ とする加法圏 $\mathbf{E}$ が定義できる.

詳しくは述べないが, $\mathbf{E}$ は可算余直積をもち, 懸垂関手 $S : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$ によって三角圏になることが知られている.

ここで, **K-理論**との関係について触れておこう. K-理論の基本的な考え方は, C^* -環 B に対して得られる 2 つのアーベル群 $K_0(B)$ と $K_1(B)$ の構造を調べることで, B の構造を調べるというものである. C^* -環 B に対し, $E(\mathbb{C}, B)$ は $K_0(B)$ に一致し, $E(S\mathbb{C}, B)$ は $K_1(B)$ に一致する. 2 つの C^* -環 A, B が $\mathbf{E}$ で同型であるならば, $i = 0, 1$ に対して $K_i(A)$ と $K_i(B)$ は同型である. 逆については, Rosenberg, Schochet [RS87] の **普遍係数定理 (universal coefficient theorem, UCT)** により, C^* -環 A, B が **bootstrap class** $\mathcal{B}_E$ ⁹に属するとき, $i = 0, 1$ に対して $K_i(A)$ と $K_i(B)$ が同型であるならば, A, B は $\mathbf{E}$ で同型であることが知られている.

次に, 有限 T_0 -空間上の C^* -環に対する E-理論¹⁰を概説する. 詳細は [DM12] を参照してほしい. X を有限 T_0 -空間とする.

⁸加法圏とは, 零対象をもち, 対象 $A, B \in \mathbf{A}$ に対し, 射の集合 $\mathbf{A}(A, B)$ がアーベル群で, 直和 $A \oplus B$ が存在するような圏のことである.

⁹ $\mathcal{B}_E$ は三角圏 $\mathbf{E}$ において $\mathbb{C}$ を含む $\aleph_0$ -localizing subcategory として定義される.

¹⁰第二可算空間上の C^* -環に対する E-理論も同様に定義できる.

定義 1.31. X 上の C^* -環 A, B に対し, $SA \otimes \mathbb{K}$ から $SB \otimes \mathbb{K}$ への approximately X -equivariant asymptotic morphism のホモトピー同値類のなすアーベル群を $E(X; A, B)$ と表記する. X 上の C^* -環を対象とし, A から B への射の集合を $E(X; A, B)$ とする加法圏 $\mathbf{E}(X)$ が定義できる.

注意 1.32. X が 1 点空間のとき, $\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}$ である.

これも詳しくは述べないが, $\mathbf{E}(X)$ は可算余直積をもち, 懸垂関手 $S : \mathbf{E}(X) \rightarrow \mathbf{E}(X)$ によって三角圏になることが知られている. 未定義語を用いて $\mathbf{E}(X)$ を定義したが, どのように構成されるのかを理解することは不要で, 次に挙げる普遍性が重要である.

命題 1.33. 対象をそのまま移すような標準的な Bott 関手 $C^*(X) \rightarrow \mathbf{E}(X)$ が存在し, 次の普遍性をみたす. $\mathbf{A}$ が加法圏で $F : C^*(X) \rightarrow \mathbf{A}$ が Bott 関手であるならば, ある関手 $\hat{F} : \mathbf{E}(X) \rightarrow \mathbf{A}$ が一意に存在して, 次の図式を可換にする:

$$\begin{array}{ccc} C^*(X) & & \\ \downarrow & \searrow F & \\ \mathbf{E}(X) & \xrightarrow{\hat{F}} & \mathbf{A}. \end{array}$$

C^* -環の分類理論における著名な結果として, Kirchberg [Kir94] は, X 上の C^* -環 A, B が核型, 安定, 純無限, 緊密¹¹であるとき, A, B が $\mathbf{E}(X)$ で同型であるならば, X 上の C^* -環として同型であることを証明した¹². また, X が 1 点空間の場合に対して, Phillips [Phi00] は別証明を与えた¹³.

そこで, どのような場合に X 上の C^* -環 A, B が $\mathbf{E}(X)$ で同型になるのかを考えるのは, 自然で重要な問いである. X が 1 点空間の場合, 先で述べたように, $\mathcal{B}_E$ に属する 2 つの C^* -環は, K_0 -群, K_1 -群がそれぞれ同型であるならば, $\mathbf{E}$ で同型になる. その一般化として, ハッセ図が無向グラフとしてディンキン図形の A 型であるような有限 T_0 -空間 X に対して, Meyer, Nest [MN12], Bentmann, Köhler [BK11] は, **filtrated K-theory** とよばれる不変量に対して UCT を証明することで, X -同変な bootstrap class $\mathcal{B}_E(X)$ ¹⁴に属する 2 つの C^* -環は, filtrated K-theory が同型であるならば, $\mathbf{E}(X)$ で同型であることを証明した. X が一般の有限 T_0 -空間の場合には, UCT をみたす K-理論の不変量は何なのかは知られていないが, 本稿で紹介する主結果は, この問題を考える上で有用であると期待している.

1.6 制限関手と拡張関手

本小節では, 局所閉集合への制限によって得られる関手および連続写像から誘導される関手を導入する. これらの関手は, 鏡映関手を定義するときを使う.

定義 1.34. A を X 上の C^* -環とする. X の局所閉集合 Y とは, $V \subset U$ をみたす $U, V \in \mathcal{O}(X)$ を用いて $Y = U \setminus V$ と表される集合のことだった. ここで, C^* -環 $A(Y)$ を次の商で定める:

$$A(Y) := A(U)/A(V).$$

$A(Y)$ は U, V の取り方に依存するよう見えるが, 実は自然な同型を除いて一意に定まる.

注意 1.35. 開集合や閉集合は局所閉集合である. 開集合 U は $U = U \setminus \emptyset$ と表せ, $A(\emptyset) = 0$ なので, 元々与えられている $A(U)$ と今定義された $A(U)$ は一致する. また, $A(X) = A$ なので, 閉集合 E に対し, $A(E) = A/A(X \setminus E)$ が成り立つ.

¹¹ X 上の C^* -環 A が緊密であるとは, $\mathcal{O}(X) \ni U \mapsto A(U) \in \mathbb{I}(A)$ が全単射であることを指す. C^* -環が単純であることと 1 点空間上の C^* -環として緊密であることは同値である.

¹²Kirchberg は E-理論ではなく, Kasparov [Kas81] によって導入された KK-理論を本質的に用いて分類定理を証明した. E-理論と KK-理論は異なる普遍性をもつが, 非常によく似ている. 実際, 核型 C^* -環に対しては E-理論と KK-理論は一致する. 本稿では, E-理論と KK-理論の違いには深入りしないことにする.

¹³Phillips による証明では, E-理論が本質的に使われている.

¹⁴ $\mathcal{B}_E(X)$ は三角圏 $\mathbf{E}(X)$ において $x \in X$ に対する $i_x^X \mathbb{C}$ を含む $\aleph_0$ -localizing subcategory として定義される.

定義 1.36. X を有限 T_0 -空間とし, $Y \subset X$ を局所閉集合とする. X から Y への制限関手 (restriction functor)

$$r_X^Y : \mathbf{C}^*(X) \rightarrow \mathbf{C}^*(Y)$$

を次のようにして定める. X 上の $\mathbf{C}^*$ -環 A に対し, $r_X^Y A := A(Y)$ は $\mathbb{O}(Y) \ni U \mapsto A(U) \in \mathbb{I}(r_X^Y A)$ によって Y 上の $\mathbf{C}^*$ -環となる. X -同変な $*$ -準同型 $\varphi : A \rightarrow B$ に対し, Y -同変な $*$ -準同型 $r_X^Y \varphi : r_X^Y A \rightarrow r_X^Y B$ を次の図式を可換にする一意的な写像として定める:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A(V) & \longrightarrow & A(U) & \longrightarrow & A(Y) \longrightarrow 0 \\ & & \varphi \downarrow & & \varphi \downarrow & & \downarrow r_X^Y \varphi \\ 0 & \longrightarrow & B(V) & \longrightarrow & B(U) & \longrightarrow & B(Y) \longrightarrow 0. \end{array}$$

ここで, Y を $V \subset U$ をみたす $U, V \in \mathbb{O}(X)$ を用いて $Y = U \setminus V$ と表した. なお, 図式内の 2 つの行は $\mathbf{C}^*$ -環の完全列である.

定義 1.37. X, Y を有限 T_0 -空間とする. 連続写像 $\theta : X \rightarrow Y$ は関手

$$\theta_* : \mathbf{C}^*(X) \rightarrow \mathbf{C}^*(Y)$$

を次のように誘導する. X 上の $\mathbf{C}^*$ -環 A に対し, $\theta_* A := A$ は $\mathbb{O}(X) \ni U \mapsto A(\theta^{-1}(U)) \in \mathbb{I}(\theta_* A)$ によって Y 上の $\mathbf{C}^*$ -環となる. X -同変な $*$ -準同型 $\varphi : A \rightarrow B$ に対し, Y -同変な $*$ -準同型 $\theta_* \varphi : \theta_* A \rightarrow \theta_* B$ を $\theta_* \varphi := \varphi$ として定める.

定義 1.38. X を有限 T_0 -空間とし, $Y \subset X$ とする. Y から X への拡張関手 (extension functor)

$$i_Y^X : \mathbf{C}^*(Y) \rightarrow \mathbf{C}^*(X)$$

を包含写像 $Y \hookrightarrow X$ から誘導される関手として定める.

2 主結果

小節 1.1 で述べたように有限 T_0 -空間はハッセ図を用いて表せることを思い出してほしい.

K を有限 T_0 -空間とする. $\{L_j\}_{j \in J}$ を空でない有限 T_0 -空間からなる有限族とする. 各 $j \in J$ に対し, $l_j \in L_j$ を固定する. 集合としての非交和 $K \amalg \coprod_{j \in J} L_j$ に次のように 2 通りの位相を入れて, 有限 T_0 -空間 X, Y を構成する.

- (1) $k_1, \dots, k_m$ を K に対応するハッセ図の source (辺を受け取らない点) としたとき, 各 $j \in J$ に対し, l_j から $k_1, \dots, k_m$ すべてに辺を引いて得られるハッセ図に対応する有限 T_0 -空間を X として定める.
- (2) $k'_1, \dots, k'_{m'}$ を K に対応するハッセ図の sink (辺を出さない点) としたとき, 各 $j \in J$ に対し, l_j に $k'_1, \dots, k'_{m'}$ すべてから辺を引いて得られるハッセ図に対応する有限 T_0 -空間を Y として定める.

構成から, K に定まる X の相対位相と Y の相対位相は一致する (L_j たちに定まる相対位相についてもそうである). また, X において, K は閉集合, L_j たちは開集合である. Y において, K は開集合, L_j たちは閉集合である. 次に 2 つの例を挙げよう.

例 2.1. $K := \{1\}$, $L_1 := \{3\}$, $L_2 := \{4\}$, $L_3 := \{2, 5\}$ とし, L_3 に定まる順序を $2 < 5$ として定め, $l_1 := 3$, $l_2 := 4$, $l_3 := 5$ とおく. このとき, 左のハッセ図が X , 右のハッセ図が Y に対応する.



この例のように, $K = \{k\}$ の場合, k は X に対応するハッセ図の sink で, l_j から k への辺の向きをすべて反対にして得られるハッセ図に対応する有限 T_0 -空間が Y である. この操作は, 古くから知られる Bernstein, Gelfand, Ponomarev [BGP73] による簞の鏡映変換そのものである. この観察は系 2.5を得るときに重要となる. 一方, 次の例は, よく知られた簞の鏡映変換とは異なる変換を表しており, このような場合でも定理 2.4が得られるのは興味深い.

例 2.2. $K := \{1, 2, 3\}$, $L_1 := \{4\}$, $L_2 = \{5\}$ とし, K に定まる順序を $1 < 2, 1 < 3$ として定め, $l_1 := 4, l_2 := 5$ とおく. このとき, 左のハッセ図が X , 右のハッセ図が Y に対応する.



各 $j \in J$ に対し, $\theta_j : K \amalg L_j \rightarrow L_j$ を次のように定める:

$$\theta_j(x) := \begin{cases} l_j & x \in K \text{ のとき} \\ x & x \in L_j \text{ のとき.} \end{cases}$$

$K \cup L_j$ に X の相対位相を入れた空間を X_j , Y の相対位相を入れた空間を Y_j と表す. このとき, $\theta_j : X_j \rightarrow L_j$ と $\theta_j : Y_j \rightarrow L_j$ はどちらも順序を保つので, 連続である.

また, $\{\iota_j : (0, 1) \rightarrow (0, 1)\}_{j \in J}$ を像への同相写像の族であって, $\{\iota_j(0, 1)\}_{j \in J}$ が非交和であるものとして固定する¹⁵.

いよいよ鏡映関手を定義し, 主結果を述べよう.

定義 2.3 (H. in preparation). **鏡映関手 (reflecton functor)**

$$\mathbf{C}^*(X) \begin{matrix} \xrightarrow{S^+} \\ \xleftarrow{S^-} \end{matrix} \mathbf{C}^*(Y)$$

を次のように定める.

- (1) X 上の $\mathbf{C}^*$ -環 A に対し, Y 上の $\mathbf{C}^*$ -環 S^+A を次の Y -同変な $*$ -準同型の写像錐として定義する:

$$\bigoplus_{j \in J} i_{L_j}^Y \theta_{j*} r_X^{X_j} SA \rightarrow i_K^Y r_X^K SA, \quad (f_j)_j \mapsto f,$$

$$f(t) := \begin{cases} \pi_{X_j}^K(f_j(s)) & \text{ある } j \in J, s \in (0, 1) \text{ が存在して } t = \iota_j(s) \text{ のとき} \\ 0 & \text{そうでないとき.} \end{cases}$$

ここで, $\pi_{X_j}^K : A(X_j) \rightarrow A(K)$ は商写像を表す. 次に, X -同変な $*$ -準同型 $\varphi : A_1 \rightarrow A_2$ に対し, $S^+\varphi : S^+A_1 \rightarrow S^+A_2$ を次の可換図式から写像錐の普遍性 (命題 1.26) により誘導される Y -同変な $*$ -準同型として定める:

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_j i_{L_j}^Y \theta_{j*} r_X^{X_j} SA_1 & \longrightarrow & i_K^Y r_X^K SA_1 \\ \bigoplus_j i_{L_j}^Y \theta_{j*} r_X^{X_j} S\varphi \downarrow & & \downarrow i_K^Y r_X^K S\varphi \\ \bigoplus_j i_{L_j}^Y \theta_{j*} r_X^{X_j} SA_2 & \longrightarrow & i_K^Y r_X^K SA_2. \end{array}$$

¹⁵例えば, $J = \{0, \dots, n-1\}$ なら, 各 $j \in J$ に対し, $\iota_j(s) := (j+s)/n$ と定めればよい.

(2) Y 上の C^* -環 B に対し, X 上の C^* -環 S^-B を次の X -同変な $*$ -準同型の写像錐として定義する:

$$i_K^X r_Y^K B \rightarrow \bigoplus_{j \in J} i_{L_j}^X \theta_{j*} r_Y^{Y_j} B, \quad b \mapsto (b)_j.$$

次に, Y -同変な $*$ -準同型 $\psi : B_1 \rightarrow B_2$ に対し, $S^- \psi : S^- B_1 \rightarrow S^- B_2$ を次の可換図式から写像錐の普遍性 (命題 1.26) により誘導される X -同変な $*$ -準同型として定める:

$$\begin{array}{ccc} i_K^X r_Y^K B_1 & \longrightarrow & \bigoplus_j i_{L_j}^X \theta_{j*} r_Y^{Y_j} B_1 \\ i_K^X r_Y^K \psi \downarrow & & \downarrow \bigoplus_j i_{L_j}^X \theta_{j*} r_Y^{Y_j} \psi \\ i_K^X r_Y^K B_2 & \longrightarrow & \bigoplus_j i_{L_j}^X \theta_{j*} r_Y^{Y_j} B_2. \end{array}$$

$C^*(X)$ と $C^*(Y)$ の間の鏡映関手は, E -理論の普遍性 (命題 1.33) により, 次のように $E(X)$ と $E(Y)$ の間の関手 (これも鏡映関手とよび, 同じ記号を用いる) を誘導する:

$$\begin{array}{ccc} C^*(X) & \xrightarrow{S^+} & C^*(Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ E(X) & \xrightarrow{S^+} & E(Y), \end{array} \quad \begin{array}{ccc} C^*(X) & \xleftarrow{S^-} & C^*(Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ E(X) & \xleftarrow{S^-} & E(Y). \end{array}$$

定理 2.4 (H. in preparation). 鏡映関手

$$E(X) \xrightleftharpoons[S^-]{S^+} E(Y)$$

は三角圏としての同値を与え, さらに $\mathcal{B}_E(X), \mathcal{B}_E(Y)$ の同値を誘導する.

証明の概略. Y 上の C^* -環 B が $S^+ S^- B$ と $E(Y)$ で同型であることを証明しよう. Y 上の C^* -環 $\tilde{B}$ を次の Y -同変な $*$ -準同型の写像錐として定義する¹⁶:

$$\bigoplus_{j \in J} i_{L_j}^Y \theta_{j*} r_Y^{Y_j} S C B \rightarrow S B, \quad (f_j)_j \mapsto f,$$

$$f(t) := \begin{cases} f_j(s, 0) & \text{ある } j \in J, s \in (0, 1) \text{ が存在して } t = \iota_j(s) \text{ のとき} \\ 0 & \text{そうでないとき.} \end{cases}$$

すると, 次の可換図式が得られる:

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & i_K^Y r_Y^K S^2 B & \longrightarrow & S^+ S^- B & \longrightarrow & \bigoplus_j i_{L_j}^Y \theta_{j*} r_X^{X_j} S S^- B \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \iota_2 & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & S^2 B & \xrightarrow{\iota_1} & \tilde{B} & \longrightarrow & \bigoplus_j i_{L_j}^Y \theta_{j*} r_Y^{Y_j} S C B \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \bigoplus_j i_{L_j}^Y r_Y^{L_j} S^2 B & \longrightarrow & \bigoplus_j i_{L_j}^Y r_Y^{L_j} S C B & \longrightarrow & \bigoplus_j i_{L_j}^Y r_Y^{L_j} S B \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}.$$

¹⁶ $SCB(Y_j) = C_0((0, 1) \times [0, 1], B(Y_j))$ が成り立つことに注意せよ.

ここで、3つの行と3つの列はすべて Y 上の C^* -環の完全列となる． $\bigoplus_j i_{L_j}^Y \theta_{j*} r_Y^{Y_j} SCB$ と $\bigoplus_j i_{L_j}^Y r_Y^{L_j} CSB$ はどちらも可縮なので、 ι_1, ι_2 は標準的な Bott 関手 $\mathbf{C}^*(Y) \rightarrow \mathbf{E}(Y)$ で送ると、命題 1.29 (2) により、どちらも $\mathbf{E}(Y)$ における同型射に移る．さらに、Bott 周期性 (命題 1.28) により、 B と $S^2 B$ は $\mathbf{E}(Y)$ で同型である．以上から、 B と $S^+ S^- B$ が $\mathbf{E}(Y)$ で同型であることが証明された．同様に、命題 1.29 (1) と Bott 周期性 (命題 1.28) を用いることで、 X 上の C^* -環 A が $S^- S^+ A$ と $\mathbf{E}(X)$ で同型であることが証明できる． $\square$

系 2.5 (H. in preparation). X_1, X_2 を有限 T_0 -空間とし、対応するハッセ図が無向グラフとして同じ木を表すとする．このとき、2つの三角圏 $\mathbf{E}(X_1), \mathbf{E}(X_2)$ は同値で、さらに $\mathcal{B}_{\mathbf{E}}(X_1), \mathcal{B}_{\mathbf{E}}(X_2)$ の同値を誘導する．

証明の概略. [ASS06, Lemma 5.2] より、「sink を 1 つ選んでその点に入る辺の向きを反対にする」という操作を有限回 X_1 に施すことで X_2 が得られる．よって、定理 2.4 から主張が従う． $\square$

先述の通り、一般の有限 T_0 -空間上の C^* -環に対し、どのような K -理論的不変量が UCT をみたすのかは知られていない．しかし、この結果を応用することで、ハッセ図が無向グラフとして木であるような有限 T_0 -空間 X_1 に対して UCT を証明することができれば、 X_1 の辺の向きを変えて得られる有限 T_0 -空間 X_2 に対しても UCT が証明できると期待している．

謝辞

本研究は、JST 次世代研究者挑戦的研究プログラム JPMJSP2123 の支援を受けたものです．

References

- [ASS06] Ibrahim Assem, Andrzej Skowronski, and Daniel Simson, *Elements of the representation theory of associative algebras: Techniques of representation theory*, London Mathematical Society Student Texts, Cambridge University Press, 2006.
- [BGP73] I. N. Bernstein, I. M. Gelfand, and V. A. Ponomarev, *Coxeter functors and Gabriel's theorem*, Uspehi Mat. Nauk **28** (1973), no. 2, 19–33.
- [BK11] Rasmus Bentmann and Manuel Köhler, *Universal coefficient theorems for C^* -algebras over finite topological spaces*, 2011.
- [Bla98] Bruce Blackadar, *K -theory for operator algebras*, second ed., Mathematical Sciences Research Institute publications, vol. 5, Cambridge University Press, 1998.
- [Bla06] ———, *Operator algebras: Theory of C^* -algebras and von Neumann algebras*, vol. 122, Springer Science & Business Media, 2006.
- [BO08] Nathaniel P. Brown and Narutaka Ozawa, *C^* -algebras and finite-dimensional approximations*, Graduate studies in mathematics, American Mathematical Society, 2008.
- [CH90] Alain Connes and Nigel Higson, *Déformations, morphismes asymptotiques et K -théorie bivariante*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **311** (1990), no. 2, 101–106.
- [DM12] Marius Dadarlat and Ralf Meyer, *E -theory for C^* -algebras over topological spaces*, Journal of Functional Analysis **263** (2012), no. 1, 216–247.
- [Kas81] G. G. Kasparov, *The operator K -functor and extensions of C^* -algebras*, Mathematics of the USSR-Izvestiya **16** (1981), no. 3, 513–572.
- [Kir94] Eberhard Kirchberg, *The classification of purely infinite C^* -algebras using Kasparov's theory*, 1994.
- [MN09] Ralf Meyer and Ryszard Nest, *C^* -algebras over topological spaces: The bootstrap class*, Muenster Journal of Mathematics **2** (2009), 215–252.
- [MN12] ———, *C^* -algebras over topological spaces: Filtrated K -theory*, Canadian Journal of Mathematics **64** (2012), no. 2, 368–408.
- [Phi00] N. Christopher Phillips, *A classification theorem for nuclear purely infinite simple C^* -algebras*, Documenta Mathematica **5** (2000), 49–114.
- [RS87] Jonathan Rosenberg and Claude Schochet, *The Künneth theorem and the universal coefficient theorem for Kasparov's generalized K -functor*, Duke Mathematical Journal **55** (1987), no. 2, 431–474.